Projection extensionnelle pour la réduction d'un treillis de concepts formels flous

Fuzzy formal concepts lattice reduction based on extensional projection

Hakim Radja[1] Yassine Djouadi[2]

1. UMMTO, Univ. de Tizi-Ouzou, Dept. Informatique, BP 17, RP, Tizi-Ouzou, Algérie, Hakim.Radja@hotmail.fr
2. USTHB, Université des Sciences et de la Technologie d'Alger, BP 32 El Alia, Algérie, djouadi@irit.fr

Résumé :

En analyse de concepts formels, les connaissances induites (appelées concepts formels) sont hiérarchisées et représentées sous la forme d'un treillis de Galois. Il s'avère que dans le cas d'applications réelles, le nombre de concepts formels est très important ce qui augmente considérablement la taille du treillis de Galois engendré et par voie de conséquence la complexité de la manipulation de ce treillis. Les treillis de Galois alpha sont apparus récemment pour répondre à ce problème. Néanmoins, les approches proposées en ce sens prennent uniquement en considération des relations Booléennes. Dans la continuité de ces approches, nous proposons dans ce papier une méthode permettant de réduire la taille du treillis de Galois dans le cas de relations binaires floues. L'intérêt de notre contribution se trouve d'autant plus justifié que le nombre de concepts formels est d'autant plus important lorsque la relation est floue. Pour ce faire, nous utilisons un partitionnement de l'ensemble des instances en classes de base. Un tel partitionnement est obtenu en assignant à chaque instance une classe de base en fonction de son type. Nous introduisons ensuite une projection extensionnelle consistant à définir une nouvelle extension pour chaque intension floue. Cette nouvelle notion d'extension est basée sur un certain critère de satisfaction alpha (relatif à la partition) en classes de base. L'approche ainsi proposée permet de réduire le nombre de concepts formels et par conséquence la taille du treillis de Galois.

Mots-clés :

Treillis de Galois alpha, analyse de concepts formels flous, réduction de treillis.

Abstract:

A Galois lattice is a representation of knowledge as a hierarchy of concepts. In the case of real application the number of formal concepts is very important which significantly increases the size of the Galois lattice generated. We propose in this paper a method to reduce the size of concept lattice in the case of fuzzy binary relationship, inspired by Galois alpha lattice. For this purpose, we use a partitioning of the set of instances to base classes. Such partitioning is obtained by assigning to each instance a basis class according to its type. We will then make an extensional projection consisting of defining a new extension for each fuzzy intension. This new notion of extension is based on a criterion of alpha satisfaction relating to the partition to base classes, which helps to reduce the number of formal concepts and therefore the size of the Galois lattice.

Keywords:

Galois alpha lattice, fuzzy formal concept analysis, lattice reduction.

1 Introduction

L'analyse de concepts formels (ACF), introduite par Wille [1], consiste à apprendre des paires de sous ensembles ({*objets*},{*propriétés*}), appelés concepts formels, à partir d'une relation binaire (appelée contexte formel) entre un ensemble d'objets et un ensemble de propriétés. Rappelons que dans la proposition initiale de Wille, la relation considérée est Booléenne (un objet possède totalement la propriété ou ne la possède pas du tout). Dans le cas de l'analyse de concepts formels classique (non flou), plusieurs approches ont été proposées pour réduire la taille du treillis de Galois. Dans [4] les auteurs proposent une méthode qui se base sur l'élimination d'une partie des nœuds du treillis. Dans [5] un treillis de concepts fréquents représente la partie supérieure d'un treillis de concepts : seuls les nœuds dont l'extension est suffisamment grande (relativement à un seuil) sont représentés. Dans beaucoup d'applications, il est parfois utile de représenter une grande quantité de données en les regroupant en une hiérarchie de classes. Partant de cette idée,

Ventos & Soldano [3] ont proposé des treillis réduits appelés treillis de Galois alpha après une projection extensionnelle. Ce modèle qui permet une représentation réduite de connaissances s'avère efficace. Néanmoins, il est limité à des contextes formels Booléens. Il s'avère que l'ACF est souvent amenée à considérer des réalités concrètes (mesures, observations, jugements, etc...) où peuvent apparaître des notions de gradualité. De pareilles réalités ont déjà été modélisées par des contextes formels flous [6]. Cependant, le nombre de concepts formels induit par un contexte formel flou est largement plus important que par un contexte formel Booléen ce qui augmente considérablement la taille du treillis de Galois engendré. La quasi majorité des travaux existant dans le cadre de la réduction de treillis œuvrent sur la globalité du contexte formel (sans partitionnement de celui-ci). A ce titre, nous présentons dans ce papier, une approche permettant de réduire un treillis de concepts formels flous inspirée des treillis de Galois alpha [3]. Dans cette approche nous contrôlons le nombre de nœuds du treillis en tenant compte, dans une certaine mesure associée à un degré alpha (α), d'une partition à priori des données. Cette partition est constituée d'un ensemble de *classes de base* : chaque classe est associée à un *type de base* : celui des instances qui la constitue. Donc, dans cette approche, uniquement les instances appartenant à des classes de bases satisfaisant l'intension floue à un taux alpha seront maintenues dans l'extension alpha. Le cadre général des treillis et de l'analyse de concepts formels floue est donné dans la section 2. En section 3, nous présentons et illustrons sur un exemple simple la procédure nous permettant d'étendre les treillis de Galois alpha au cas de relations floues ainsi que l'algorithme alpha permettant de calculer pour chaque intension floue son extension alpha.

2 Analyse de concepts formels flous

L'analyse de concepts formels consiste à apprendre des paires de sous ensembles ({*objets*},{*propriétés*}) appelés concepts formels à partir d'une relation binaire appelée contexte formel. Dans la proposition initiale de Wille [1], la relation considérée est Booléenne (un objet possède totalement la propriété ou ne la possède pas du tout). Dans l'analyse de concepts formels flous, un contexte formel flou est un tuple $\mathcal{K} = (L, O, P, \mathcal{R})$ où la relation floue $\mathcal{R} \in L^{O\times P}$ est une fonction $\mathcal{R} : O \times P \in L$ (généralement $L = [0, 1]$). La fonction $\mathcal{R}$ assigne à chaque objet $x \in O$ et à chaque propriété $y \in P$ un degré $\mathcal{R}(x, y)$ exprimant le degré de satisfaction de y par x. Cette relation est représentée sous forme d'une table. Généralement les lignes représentent les objets et les colonnes les attributs, chaque cellule exprime une valeur appartenant a [0,1] , comme le montre l'exemple suivant :

Table 1 – Contexte formel flou

$\mathcal{R}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,3	0.1	0,1
x_2	0.8	0,4	0,0
x_3	0.8	0,6	0,0
x_4	1	0,4	0,0
x_5	1	0,4	0,5

Soit $\mathcal{K} = (L, O, P, \mathcal{R})$ un contexte formel flou et soient $X \in L^O$, $Y \in L^P$. Les opérateurs de dérivation $(.)^\uparrow : L^O \to L^P$ et $(.)^\downarrow : L^P \to L^O$ sont définis par Belohlavek [7] comme suit :

$$X^\uparrow(y) = \bigwedge_{x\in O} (X(x) \to \mathcal{R}(x, y))$$
$$Y^\downarrow(x) = \bigwedge_{y\in P} (Y(y) \to \mathcal{R}(x, y))$$

$X^\uparrow(y)$ (resp.$Y^\downarrow(x)$) désigne le degré d'appartenance de l'attribut y (resp. l'objet x) dans l'ensemble flou de propriétés $X^\uparrow$ (resp. ensemble flou d'objets $Y^\downarrow$). Etant donné $X \in L^O$ et $Y \in L^P$, une paire (X, Y) est un concept formel flou ssi $X^\uparrow = Y$ et $Y^\downarrow = X$. L'ensemble de tous

les concepts formels flous peut être muni d'une relation d'ordre (notée $\leq$) définie comme : $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$ ssi $X_1 \subseteq X_2$ (ou $Y_2 \subseteq Y_1$). Cet ensemble muni de la relation d'ordre $\leq$ forme un treillis complet. Les opérateurs *Meet* et *Join* sont décrits par le théorème fondamental de Ganter et Wille [2]. Il existe plusieurs méthodes permettant de construire un treillis de Galois dans le cas de l'analyse de concepts formels flous [6], [7], [8], [9] et [10]. Dans ce qui suit nous donnons l'ensemble des concepts formels flous extrait du tableau 1 en utilisant l'algorithme présenté dans [11]. La Figure 1 représente le treillis de Galois correspondant

$C_1 : (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^{0.3}, y_2^{0.1}, y_3^{0.0})$
$C_2 : (x_1^{0,3}, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^{0.8}, y_2^{0.1}, y_3^{0.0})$
$C_3 : (x_1^{0,3}, x_2^{0,8}, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^{0.1}, y_3^{0.0})$
$C_4 : (x_1^{0,1}, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1), (y_1^{0.8}, y_2^{0.4}, y_3^{0.0})$
$C_5 : (x_1^{0,1}, x_2^{0,4}, x_3^1, x_4^{0,4}, x_5^{0,4}), (y_1^{0.8}, y_2^{0.6}, y_3^{0.0})$
$C_6 : (x_1^{0,1}, x_2^{0,4}, x_3^{0,8}, x_4^{0,4}, x_5^{0,4}), (y_1^1, y_2^{0.6}, y_3^{0.0})$
$C_7 : (x_1^1, x_2^{0,0}, x_3^{0,0}, x_4^1, x_5^1), (y_1^{0.3}, y_2^{0.1}, y_3^{0.1})$
$C_8 : (x_1^{0,1}, x_2^{0,0}, x_3^{0,0}, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^{0.4}, y_3^{0.5})$
$C_9 : (x_1^{0,1}, x_2^{0,0}, x_3^{0,0}, x_4^1, x_5^{0,5}), (y_1^1, y_2^{0.4}, y_3^{0.1})$
$C_{10} : (x_1^{0,3}, x_2^{0,0}, x_3^{0,0}, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^{0.1}, y_3^{0.1})$
$C_{11} : (x_1^{0,1}, x_2^{0,8}, x_3^{0,8}, x_4^1, x_5^1), (y_1^1, y_2^{0.4}, y_3^{0.0})$
$C_{12} : (x_1^{0,1}, x_2^{0,0}, x_3^{0,0}, x_4^{0,4}, x_5^{0,4}), (y_1^1, y_2^1, y_3^1)$

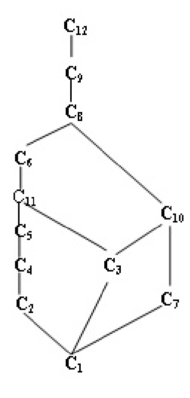


Figure 1 – Treillis de concepts formels flous

Dans le cas d'applications réelles, le nombre de concepts formels flous est très important, ce qui augmente considérablement la taille du treillis de Galois engendré. La suite de ce papier propose une approche par partitionnement permettant de réduire la taille du treillis tout en gardant son informativité.

3 Proposition

3.1 Partitionnement en classe de base

Les classes de bases sont un regroupement d'objets partageants un même type. Ces classes sont obtenues par un partitionnement non flou de l'ensemble de tous les objets. Ce partitionnement est généralement obtenu à l'aide d'un expert du domaine (Knowledge Engineer). Cette activité ne pouvant être décrite de manière formelle, nous proposons de l'illustrer à travers un exemple concret relevant du domaine médical. Cet exemple a été construit en collaboration avec un médecin spécialiste du Centre Hospitalo Universitaire Nedir Mohammed de Tizi ouzou. Nous avons ainsi mis en évidence les maladies suivantes :
- Hypertension artérielle (o_1),
- Insuffisance cardiaque (o_2),
- Rétrécissement mitral (o_3),
- Dilatation des bronches (o_4),
- Asthme (o_5).

Il a été constaté que les manifestations de ces maladies se font généralement à travers les symptômes suivants :
- Dyspnée (D),
- Douleurs thoraciques (H),
- Expectoration (E).

Le contexte formel illustré à travers le Tableau 2 quantifie les corrélations (relations) entre les maladies et les symptômes correspondants. Ce contexte formel relie un ensemble de maladies à un ensemble de symptômes. A titre d'exemple, un patient ayant de l'hypertension artérielle possède le symptôme d'expectoration à un degré égal à 0,1. Tandis qu'un patientatteint d'insuffisance cardiaque présente le symptôme de dyspnée à un degré 08. L'expert a constaté que chaque maladie appartient à une classe de base. Ainsi, les trois premières

Table 2 – Contexte formel flou

Classe de base	$\mathcal{R}$	D	H	E
CL1	o_1	0,3	0.1	0,1
	o_2	0.8	0,4	0,0
	o_3	0.8	0,6	0,0
CL2	o_4	1	0,4	0,0
	o_5	1	0,4	0,5

maladies (hypertension artérielle, insuffisance cardiaque, rétrécissement mitral) appartiennent à la classe des maladies cardio-vasculaires, et les deux dernières (dilatation des bronches, asthme) appartiennent à la classe des maladies respiratoires. Le partitionnement des maladies a ainsi donné lieu à deux classes de base, à savoir :

– Maladie cardio-vasculaires (CL_1)
– Maladies respiratoires (CL_2)

3.2 projection Extensionnelle

Dans [13], les auteurs formalisent l'extension de l'analyse formelle de concepts à des langages plus sophistiqués. La notion de projection est utilisée pour réduire le langage et ainsi réduire la taille du treillis de Galois. Indépendamment, [14] utilise la même notion de projection pour faire varier le langage mais l'utilise également en la nommant projection extensionnelle, pour modifier la fonction d'extension ext. Nous allons proposer une projection extensionnelle pour déterminer, pour chaque intension (terme) floue, une extension dont les objets appartiennent tous à des classes de bases qui satisfont ces termes à un pourcentage alpha. Pour ce, nous allons d'abord rappeler la notion d'inclusion ensembliste floue utilisée. Nous introduisons ensuite une mesure de satisfaction alpha. Basée sur cette dernière, nous proposons de quantifier l'appartenance alpha. Enfin, nous proposons une nouvelle notion d'extension alpha basée sur les notions précédemment définies. Dans [12], le degré d'inclusion est défini comme suit :

Définition 1. (subsethood degree)

Soit $A, B \in L^X$ deux sous ensembles flous. Le degré d'inclusion $S(A, B)$ de A dans B est donné comme suit :

$$S(A, B) = \bigwedge_{x \in X}((A(x) \rightarrow B(x))$$

où $\rightarrow$ désigne l'implication floue

Il est à noter que nous utiliserons l'implication de Gödel dans la suite de ce papier. Nous utiliserons aussi l'application $\mathcal{I}$, pour désigner l'intension $T = \mathcal{I}(o_i)$ d'un objet quelconque o_i, définie comme suit :

$$\mathcal{I} : \; X \rightarrow L^Y$$
$$o_i \mapsto T$$

où $T(y_k) = R(o_i, y_k)$

3.2.1 Satisfaction alpha

Soient $X = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ un ensemble non flou d'objets (instances) constituant une classe de base, T un terme flou (intension floue) et α un nombre entre [0,100]. Nous définissons dans ce qui suit la notion de satisfaction α. Un ensemble $X = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ satisfait une intension floue T à un taux α (noté $X sat_\alpha T$) ssi au moins α% de ses objets (instances) satisfont T :

$$X \; sat_\alpha T \; ssi \; \frac{\sum_{i=0}^{n} S(T, \mathcal{I}(o_i))}{|X|} \times 100 \geq \alpha \quad (1)$$

où :

$|X|$: la cardinalité de l'ensemble non flou X (la classe de base).

$S(T, \mathcal{I}(o_i))$: degré d'inclusion de l'intension T dans $\mathcal{I}(o_i)$.

Exemple :

L'ensemble $X = \{o_1, o_2, o_3\}$ satisfait le terme $T = (D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0})$ pour $\alpha = 70\%$ car :
$\mathcal{I}(o_1) = (D^{0,3}, H^{0,1}, E^{0,1})$
$S(T, J(o_1)) =$

$S((D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0}), (D^{0,3}, H^{0,1}, E^{0,1})) = 0,1$
De la même manière :
$S(T, \mathcal{I}(o_2)) = 1$
$S(T, \mathcal{I}(o_3)) = 1$
De ce fait, nous avons :

$X sat_{70} T\ car\ \frac{\sum_{i=1}^{n} S(T,\mathcal{I}(o_i))}{|X|} \times 100 = \frac{(0,1+1+1)}{3} \times 100 = 70$
Par contre, l'ensemble $X = \{o_1, o_2, o_3\}$ ne satisfait pas le terme $T = (D^1, H^{0,4}, E^{0,5})$ pour $\alpha = 50$.

3.2.2 Appartenance alpha

Soit $X = \{o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n\}$ un ensemble d'objets (non flou) et CL désignant une fonction telle que $CL(o_i)$ corresponde à la classe de base de l'objet o_i. Soit T un terme (intension) flou de L^P.

$$o_i\ app_\alpha T\ ssi\ CL(o_i)\ sat_\alpha T \quad (2)$$

Exemple :
Pour le terme flou $T = (D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0})$, $o_1\ app_{60}\ T$ car :

$\frac{\sum_{i=1}^{3} S(T,\mathcal{I}(o_i))}{|CL1|} \times 100 = \frac{(0,1+1+1)}{3} \times 100 = 70 > 60$
Plus de 60% de la classe de base de o_1 ($CL1$: classe de l'objet o_1) satisfait le terme flou $T = (D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0})$.

3.2.3 Extension alpha

L'extension alpha (notée $ext_\alpha(T)$) d'un terme flou T , relativement à la partition CL est définie comme suit :

$$ext_\alpha(T) = \{o_i / \mu_X(o_i)\} \quad (3)$$

Où $\mu_X(o_i) = S(T, \mathcal{I}(o_i))\ si\ \ o_i app_\alpha T\ ,\ 0\ sinon$

Exemple :
Cet exemple illustre la construction de l'ensemble $ext_{50}(T)$ pour le terme $T = (D^1, H^{0,1}, E^1)$ et $\alpha = 50$

– pour $o_1 \in CL1$

$S(T, \mathcal{I}(o_1)) = 0,1$
$S(T, \mathcal{I}(o_2)) = 0,0$
$S(T, \mathcal{I}(o_3)) = 0,0$
Pour que o_1 fasse partie de $ext_{50}(T)$, il faut que sa classe de base satisfasse T pour $\alpha = 50$:

$\frac{\sum_{i=1}^{3} S(T,\mathcal{I}(o_i))}{|CL1|} \times 100 = \frac{(0,1+0+0)}{3} \times 100 = 3 > 50$
Donc la classe de base $CL1 = \{o_1, o_2, o_3\}$ ne satisfait pas le terme $T = (D^1, H^{0,1}, E^1)$ à 50%.
Ce qui fait que : $o_1 \in ext_{50}(T)$ avec $\mu_X(o_1) = 0$

– La même chose pour les instances o_2 et o_3 car elles appartiennent à la même classe de base que o_1 .
– Pour $o_4 \in CL2$:
$S(T, \mathcal{I}(o_4)) = 1$
$S(T, \mathcal{I}(o_5)) = 0,5$

$\frac{\sum_{i=4}^{5} S(T,\mathcal{I}(o_i))}{|CL2|} \times 100 = \frac{(1+0,5)}{2} \times 100 = 75 > 50$

Donc la classe de base $CL2 = \{o_4, o_5\}$ satisfait le terme $T = (D^1, H^{0,1}, E^1)$ à 50%. De ce fait, $o_4 ext_{50}(T)$ avec un degré d'appartenance : $\mu_X(o_4) = S(T, \mathcal{I}(o_4)) = S((D^1, H^{0,1}, E^1), (D^1, H^{0,4}, E^1)) = 1$

Donc $o_5 \in ext_{50}(T)$ avec un degré d'appartenance $\mu_X(o_5) = S(T, \mathcal{I}(o_5)) = S((D^1, H^{0,1}, E^1), (D^1, H^{0,4}, E^{0,5})) = 0,5$
Donc l'extension pour $\alpha = 50$ du terme $T = (D^1, H^{0,1}, E^1)$ est : $ext_{50}(T) = ext_{50}(D^1, H^{0,1}, E^1) = (o_1^{0,0}, o_2^{0,0}, o_3^{0,0}, o_4^1, o_5^{0,5})$

3.3 Projection extensionnelle

Rappelons ci-dessous la notion générale de projection :
Un opérateur $Proj$ est une projection d'un treillis $(E, \leq)$ *ssi* pour tout couple $X, Y \in E$ les propriétés suivantes respectivement de minimalité, monotonie et idempotence sont vérifiées :

1. $Proj(X) \leq X$.
2. $X \leq Y \Rightarrow Proj(X) \leq Proj(Y)$.
3. $Proj(Proj(X)) = Proj(X)$.

Soit E_α l'ensemble de toutes les extensions alpha d'un terme T. En changeant l'extension (ext), une projection extensionnelle transforme un treillis de Galois en un Treillis plus petit mais qui garde l'informativité du treillis initial. A ce titre, la proposition suivante permet d'établir une importante propriété.

Proposition 1.
Soit $G = (L^O, Int, L^P, ext)$ un treillis de Galois. Soient $ext_\alpha = proj_\alpha \circ ext$ et $E_\alpha = proj_\alpha(L^O)$. Alors $Int : E_\alpha \rightarrow L^P$ et $ext_\alpha : L^P \rightarrow E_\alpha$ définissent une correspondance de Galois entre E_α et L^P.

Preuve.
Pour prouver la **Proposition 1**, il suffit de montrer que $proj_\alpha$ est une projection :

– Minimalité :
  $proj_\alpha(X) \leq X$
  $proj_\alpha(X)$ est composée des objets de X qui satisfont le critère α, ie $proj_\alpha(X)$ est inclus dans X puisqu'on élimine des éléments de X , donc $proj_\alpha$ est minimal.

– Monotonie :
  $X \leq Y \Rightarrow proj_\alpha(X) \leq proj_\alpha(Y)$
  Si X est inclus dans Y, chaque élément de X retiré par la projection sera aussi retiré de Y, et ceux qui restent auront toujours les mêmes degrés d'appartenances $proj_\alpha(X)$ est donc inclus dans $proj_\alpha(Y)$ et donc $proj_\alpha$ est monotone.

– Idempotence :
  $proj_\alpha(proj_\alpha(X)) = proj_\alpha(X)$
  Dans la nouvelle extension (extension alpha) il ne reste que les objets dont $\alpha\%$ de la classes de base satisfont le terme flou, donc une nouvelle projection avec un même α nous donnera les mêmes objets avec les mêmes degrés d'appartenance.

3.4 Algorithme *EXTALPHA*

L'algorithme est conçu pour générer, pour chaque intension floue, son extension alpha. Il est organisé comme suit : au départ l'ensemble des extensions alpha (EXT_SET) est initialisé à l'ensemble vide Ensuite pour chaque intension floue (T), l'algorithme calcule son extension alpha ($ext_\alpha(T)$) en parcourant chaque ligne du contexte formel flou et en vérifiant la condition de satisfaction alpha pour chaque ligne, si la condition est vérifiée l'objet correspondant à la ligne est ajouté à $ext_\alpha(T)$ avec un degré d'appartenance égale au degré d'inclusion ($\mu_X(o_i) = S(T, \mathcal{I}(o_i))$ sinon $\mu_X(o_i) = 0$. Enfin, pour chaque extension alpha générée l'algorithme vérifie si elle existe déjà dans l'ensemble EXT_SET si ce n'est pas le cas alors celle ci sera rajoutée à cette ensemble sinon il garde uniquement la plus grande intension parmi celles qui ont toutes la même extension alpha (ext_α), les autres seront enlevées de l'ensemble des intensions $INTENT - SET$. L'algorithme est organisé comme suit :

$INTENT_SET$: Ensemble de toutes les intensions floues.
EXT_SET : Ensemble des extensions alpha.
o_i : Objet de la ligne i du contexte formel flou.
m : Le nombre de ligne du contexte formel flou.
$CL(o_i)$: La classe de base de l'objet o_i.
$|CL(o_i)|$: Cardinalité de la classe de base de l'objet o_i.
$\mathcal{I}(o_i)$: Intension de l'objet non flou o_i.
T, T' : Deux intensions floues appartenant à l'ensemble des intensions floues.
$\mu_X(o_i)$: Degré d'appartenance de l'instance o_i à l'ensemble X.

Algorithm. *EXTALPHA*

Input : $\mathcal{K} = (L, O, P, \mathcal{R}), INTENT_SET$
Output : EXT_SET,
Begin
    $EXT_SET := \{\emptyset\}$;
    For each $T \in INTENT_SET)$ **Do**
        $ext_\alpha(T) := \emptyset$;
        $i := 0$;
        While $i \leq m$ **Do**
            if $\frac{\sum_{i=1}^{n} S(T, \mathcal{I}(o_i))}{|X|} \times 100 \geq \alpha$ **then**
                $\mu_X(o_i) := S(T, \mathcal{I}(o_1))$
            else
                $\mu_X(o_i) := 0$
            $ext_\alpha(T) := \{o_i/\mu_X(o_i)\} \bigcup ext_\alpha(T)$
            $i++$
        End While
        if $\neg(ext_\alpha(T) \in EXT_SET)$**then**
            $EXT_SET := EXT_SET \bigcup ext_\alpha(T)$
        else
        if$(ext_\alpha(T) = ext_\alpha(T'))and(T \subseteq T')$**then**
            $INTENT_SET := (INTENT_SET) - T$
        else
            $INTENT_SET := (INTENT_SET) - T'$
    End For
End.

Exemple d'application :
Nous reprenons l'exemple du contexte formel représenté par le Tableau 2, en utilisant l'algorithme proposé nous calculons pour chaque intension floue T son extension alpha $(ext_{60}(T))$, nous obtenons l'ensemble des concepts formels suivants :
$C2 : (o_1^{0,3}, o_2^1, o_3^1, o_4^1, o_5^1), (D^{0,8}, H^{0,1}, E^{0,0})$
$C3 : (o_1^{0,1}, o_2^1, o_3^1, o_4^1, o_5^1), (D^{0,8}, H^{0,4}, E^{0,0})$
$C4 : (o_1^{0,3}, o_2^{0,8}, o_3^1, o_4^1, o_5^1), (D^1, H^{0,1}, E^{0,0})$
$C5 : (o_1^{0,1}, o_2^{0,8}, o_3^{0,8}, o_4^1, o_5^1), (D^1, H^{0,4}, E^{0,0})$
$C6 : (o_1^{0,0}, o_2^{0,0}, o_3^{0,0}, o_4^1, o_5^1), (D^1, H^{0,4}, E^{0,5})$
$C7 : (o_1^{0,0}, o_2^{0,0}, o_3^{0,0}, o_4^1, o_5^{0,5}), (D^1, H^{0,4}, E^1)$
$C8 : (o_1^{0,0}, o_2^{0,0}, o_3^{0,0}, o_4^{0,0}, o_5^{0,0}), (D^1, H^1, E^1)$

La Figure 2 présente le treillis de Galois alpha $(\alpha = 60)$ équivalent :

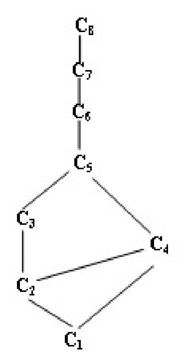


Figure 2 – Treillis réduit (G60)

Notons que pour $\alpha = 0$, on obtient exactement le treillis initial.

4 Conclusion

Dans ce papier, nous avons proposé une méthode permettant de réduire un treillis de concepts formels flous en se basant sur les treillis de Galois alpha et le partitionnement des objets. Nous avons vu qu'en modifiant la notions d'extension en se référant à une partition de l'ensemble des instances O, nous modifions le treillis des extensions tout en gardant la structure en treillis de Galois. Comme perspective, nous comptons déterminer la base minimale d'implications floues à partir du treillis de Galois alpha flou résultant permettant ainsi une représentation condensée de toutes les implications floues qu'on peut induire à partir du contexte formel initial. Ce travail peut être aussi étendu aux opérateurs de dérivation possibilistes proposées par Dubois et Prade [15].

Références

[1] R. Wille. Restructuring lattice theory : an approach based on hierarchies of concepts. In Ordered Sets,(I. Rival, ed.), Reidel, Dordrecht, pp 445-470, 1982.

[2] B. Ganter., R. Wille. Formal Concept Analysis, Springer-Verlag, 1999.

[3] V. Ventos., H. Soldano. Alpha Galois Lattices : An Overview. ICFCA 2005, pp 299-314.

[4] J. Hereth., G. Stumme. Conceptual Knowledge Discovery and Data Analysis. Int. Conf. on Conceptual Structure, 2000, pp 421-437.

[5] K. Waiyamai., L. Lakhal. Knowledge discovery from very large databases using frequent concept lattices. 11th Eur. Conf. on Machine Learning, ECML'2000, pp.. 437-445.

[6] S. Pollandt. Fuzzy Begriffe. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg, 1997.

[7] R. Belohlavek, Fuzzy Galois connections. Math.Logic Quarterly 45 (4), 1999, pp 497-504.

[8] G. Georgescu, A. Popescu : Non dual fuzzy connection. Archive for mathematical logic 43, 2004.

[9] W. Zhang : Variable threshold concept lattices. Information sciences 177(22), 2007, pp 4883-4892.

[10] J. Medina, M. Ojeda-Aciego et J. Ruiz-Calvino. Formal concept analysis via multi adjoint concept lattices. Fuzzy sets and systems, 160 (2), 2009, pp130 -144.

[11] Y. Djouadi, H. Prade. Possibility-theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices. FODM, 2011.

[12] J.A. Goguen. L-fuzzy Sets. J.Math. Anal .Appl. 18(1967), pp 145-174.

[13] B. Ganter., S. O. Kuznetsov. Pattern structures and their projections. Proceedings of ICCS 2001, pp 129-142

[14] N. Pernelle., M.C. Rousset., V. Ventos. Automatic construction and refinement of a class hierarchy over multi-valued data. In 5th Conference on Principles and practice of Knowlewdge Discovery in Databases, PKDD 2001, Lecture Notes in Artificial Intelligence : Springer-Verlag, pp.386-398.

[15] D. Dubois., H. Prade. Possibility theory and formal concept analysis in information systems. Proceedings of IFSA/EUSFLAT 2009, pp. 1021-1026.